

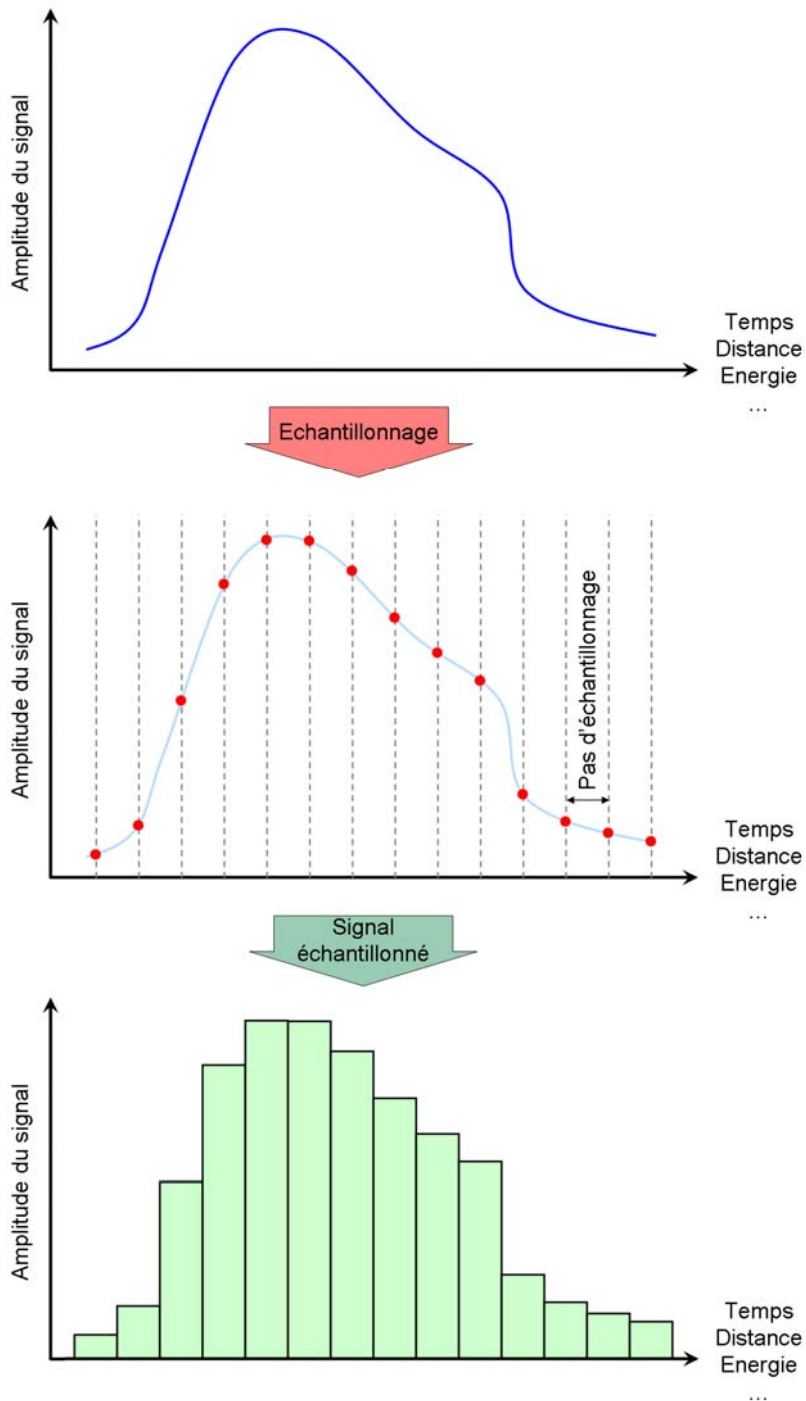
L'échantillonnage

par Axel VINCENT-RANDONNIER

Cet article est un article d'initiation à la notion d'échantillonnage.

L'échantillonnage, qu'est-ce que c'est ?

La conversion d'un signal analogique en un signal numérique nécessite l'échantillonnage du signal analogique d'origine. Cet échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu par une série de mesures successives. Ces mesures sont faites à une certaine cadence : deux valeurs consécutives sont ainsi séparées par un intervalle constant (intervalle de temps, de distance, ou de toute autre grandeur). Cet intervalle constant est le pas d'échantillonnage.



D'ores et déjà, on se rend bien compte que plus le pas d'échantillonnage est fin, plus le signal échantillonné sera proche du signal d'origine. Néanmoins, si le pas d'échantillonnage est trop fin, on ne gagnera plus grand-chose (signal échantillonné très fidèle au signal analogique d'origine) mais on multiplier la quantité de données à stocker.

Jusqu'ou ne pas aller trop loin ?

Le bon échantillonnage est celui qui permet de restituer toute l'information contenue dans le signal analogique d'origine. C'est là qu'intervient le théorème de l'échantillonnage de *Nyquist-Shannon*. Il nous dit que le pas d'échantillonnage doit être entre 2 et 3 fois plus petit que le plus petit détail enregistrable.

L'exemple classique est celui de la numérisation d'un signal sonore : l'oreille humaine est sensible à des fréquences pouvant atteindre 16 à 22 kHz, selon les individus. Pour bien restituer toute l'information que l'oreille est capable d'entendre, il faut donc échantillonner à une fréquence 2 à 3 fois plus élevée. C'est la raison pour laquelle l'industrie du disque a choisi comme standard d'échantillonnage une fréquence de 44 kHz.

Application à l'astronomie :

En astronomie, la notion d'échantillonnage se retrouve en imagerie, mais aussi, d'une certaine manière, en observation visuelle : l'image doit être projetée sur le détecteur (œil ou détecteur électronique) de manière à ce que le plus petit détail fourni par l'instrument soit plus grand que la taille des cellules chargées de la détection (cônes* ou bâtonnets* pour l'œil, pixels pour les détecteurs électroniques).

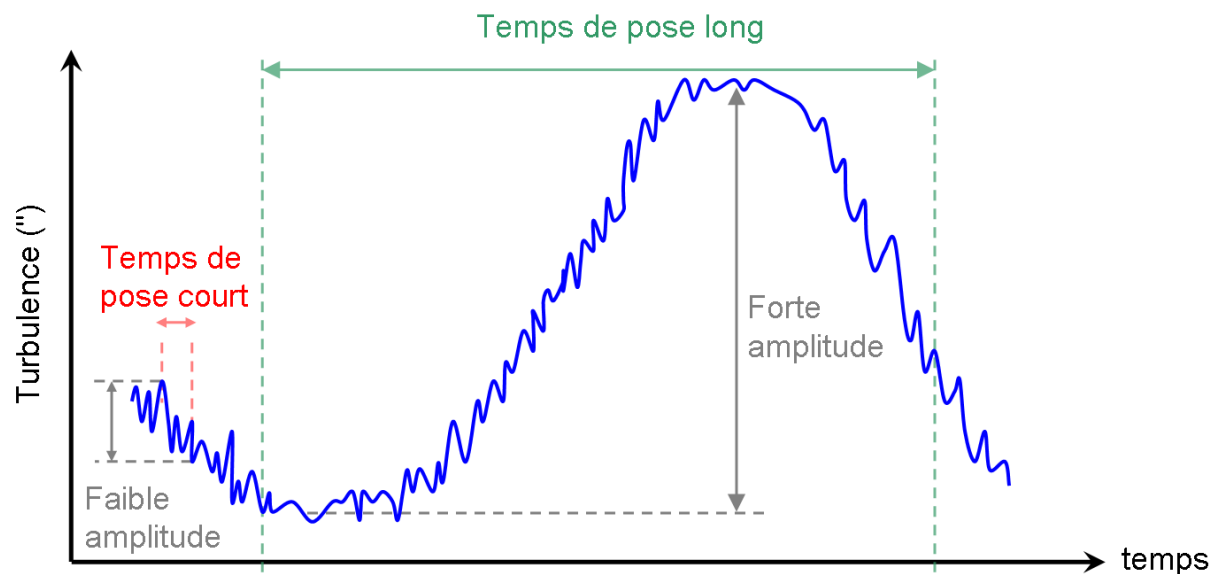
(*) le diamètre moyen des cônes et des bâtonnets est d'environ 5 μm .

Ce plus petit détail fourni dépend essentiellement de deux paramètres : le diamètre de l'instrument, et l'amplitude de la turbulence atmosphérique durant l'enregistrement.

Si la turbulence est inférieure à la résolution de l'instrument (ou pouvoir séparateur), la résolution maximale sera celle de l'instrument.

En revanche, si l'amplitude de la turbulence est supérieure à la résolution théorique de l'instrument, celui-ci sera "bridé" et la résolution maximale accessible ce soir là sera celle de la turbulence

En imagerie planétaire, si la turbulence atmosphérique est plus lente que la cadence d'acquisition des images, alors son amplitude apparente est réduite. Ex. si la turbulence varie progressivement de 2 secondes d'arc (noté 2") en 1 seconde, son amplitude sur 1/10^e de seconde sera de 0,2". Si la caméra image la planète à plus de 10 images par seconde, la turbulence apparente sera de 0,2" ! C'est pour cela que les détecteurs de type webcam ont connu un tel succès ces dernières années.



En pratique :

Pour un instrument de 200 mm de diamètre, le pouvoir séparateur est :

$$R (") = 0,252 \times \frac{\lambda (\text{nm})}{\varnothing (\text{mm})}$$

avec λ = longueur d'onde de la lumière (en nanomètres) et \varnothing = diamètre de l'instrument (en millimètres)

Pour une longueur d'onde moyenne (550 nm = vert-jaune), cet instrument a un pouvoir séparateur de 0,7".

A noter : la résolution de l'instrument est meilleure dans le bleu ($\lambda < 450 \text{ nm} \rightarrow R < 0,5''$) que dans le rouge ($\lambda > 625 \text{ nm} \rightarrow R > 0,9''$).

Cas n°1 : Turbulence < pouvoir séparateur de l'instrument

$$\text{Echantillonnage idéal} = \frac{R (")}{2 \text{ à } 3} = \frac{0,7}{2 \text{ à } 3} = 0,2'' \text{ à } 0,3'' \text{ par pixel}$$

Cas n°2 : Imagerie du ciel profond (20 minutes de pose), turbulence (amplitude de 3'' sur 20 minutes)

$$\text{Echantillonnage idéal} = \frac{R (")}{2 \text{ à } 3} = \frac{3}{2 \text{ à } 3} = 1'' \text{ à } 1,5'' \text{ par pixel}$$

Cas n°3 : Imagerie planétaire (films à 10 images/s), turbulence (amplitude de 1'' en 1/10^e de seconde)

$$\text{Echantillonnage idéal} = \frac{R (")}{2 \text{ à } 3} = \frac{1}{2 \text{ à } 3} = 0,3'' \text{ à } 0,5'' \text{ par pixel}$$

Calcul de la focale résultante nécessaire :

L'échantillonnage effectif dépend de deux paramètres : la focale de l'instrument et la taille des pixels du détecteur. Pour un détecteur donné, il convient donc d'adapter la focale pour que l'échantillonnage effectif soit égal à l'échantillonnage idéal !

$$\text{Echantillonnage effectif ("/pixel)} = 206 \times \frac{\text{Taille des pixels } (\mu\text{m})}{\text{Focale (mm)}}$$

Donc, la focale idéale est donnée par la formule suivante :

$$\text{Focale idéale (mm)} = 206 \times (2 \text{ à } 3) \times \frac{\text{Taille des pixels } (\mu\text{m})}{R_{\text{max}} (")}$$

Avec R_{max} = résolution maximale accessible (Pouvoir séparateur ou turbulence, suivant les cas)

Ainsi, pour les 3 cas précédemment présentés, et si l'on utilise un détecteur ayant des pixels de 7,4 μm , on trouve :

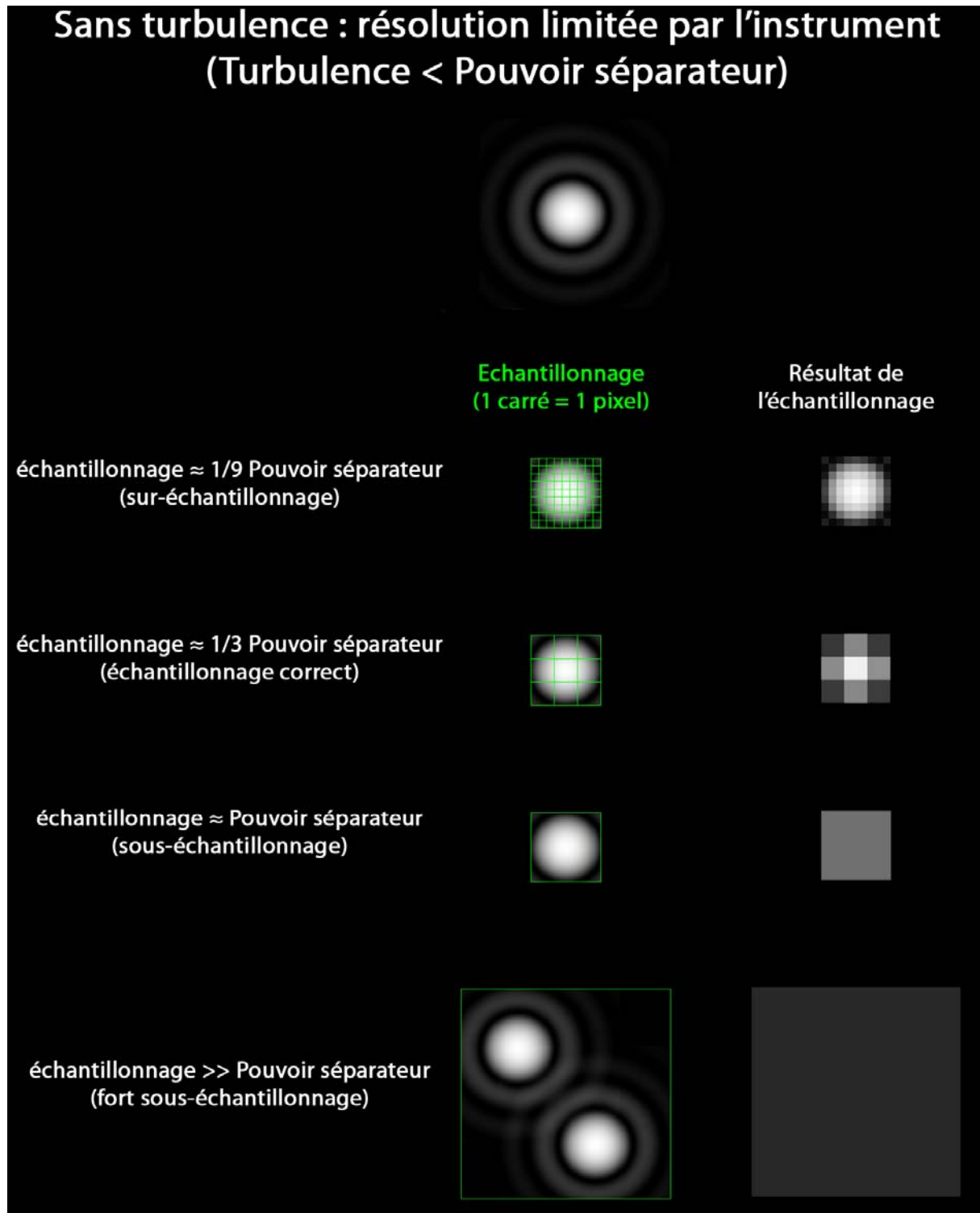
$$412 \times \frac{\text{Taille des pixels } (\mu\text{m})}{R_{\text{max}} (")} < \text{Focale idéale (mm)} < 618 \times \frac{\text{Taille des pixels } (\mu\text{m})}{R_{\text{max}} (")}$$

Cas n°1 : 4300 mm < Focale < 6500 mm

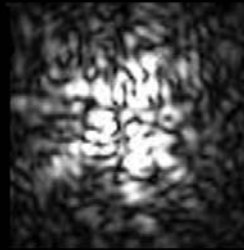
Cas n°2 : 1000 mm < Focale < 1500 mm

Cas n°3 : 3000 mm < Focale < 4600 mm

Notons au passage que l'échantillonnage selon le théorème de Nyquist-Shannon représente la règle de l'art mais que dans la pratique, on est parfois amené à s'en écarter (dans le monde réel, on ne fait pas toujours ce que l'on veut !). Et c'est d'ailleurs souvent le cas en imagerie du ciel profond où d'autres paramètres peuvent venir jouer les trouble-fête, comme la qualité du guidage, par exemple.



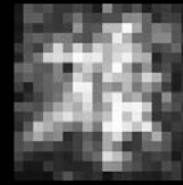
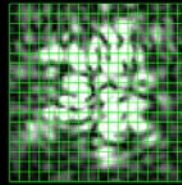
Avec turbulence : résolution limitée par la turbulence (ex.: Turbulence $\approx 2 \times$ Pouvoir séparateur)



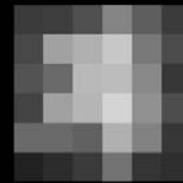
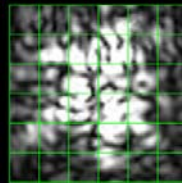
Echantillonnage
(1 carré = 1 pixel)

Résultat de
l'échantillonnage

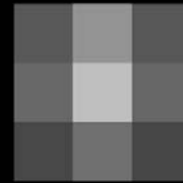
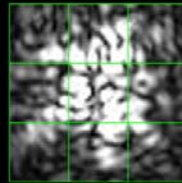
échantillonnage $\approx 1/18$ Turbulence
(fort sur-échantillonnage)



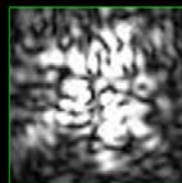
échantillonnage $\approx 1/6$ Turbulence
(sur-échantillonnage)



échantillonnage $\approx 1/3$ Turbulence
(échantillonnage correct)

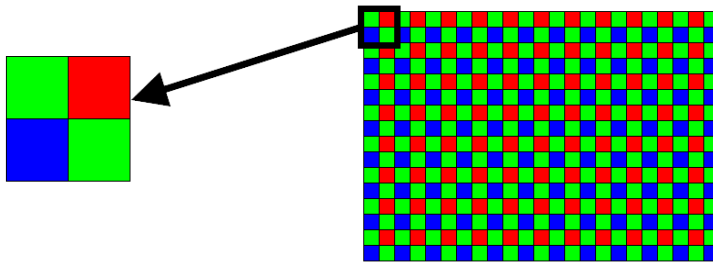


échantillonnage \approx Turbulence
(sous-échantillonnage)



Remarque :

Pour les utilisateurs d'Appareils Photo Numériques (APN), il faut prendre en compte le fait que sur la plupart des capteurs, les pixels forment ce que l'on appelle une matrice de Bayer : il y a 3 types de pixels, des rouges, des verts et des bleus, ce qui permet de restituer la couleur en une prise de vue. Pour cela, sur 4 pixels répartis en carré, 2 sont verts, 1 rouge et 1 bleu.



Ensuite, le processeur de l'appareil photo fait de savants calculs pour reconstituer l'image couleur. Mais le problème en considérant la taille réelle des pixels, c'est que si une étoile est centrée sur un pixel rouge par exemple, le rendu de l'étoile sera majoritairement...rouge. Du coup, pour bien calculer l'échantillonnage idéal, il serait judicieux de considérer un "superpixel" deux fois plus grand (14,8 µm au lieu de 7,4 µm, dans l'exemple précédent), et qui contiendrait l'information des 3 couleurs primaires. En pratique, l'opération de dématricage autorise une meilleure résolution de ces "superpixels" et un facteur de taille de 1,5 est généralement considéré comme plus réaliste.

Un fichier excel permettant de calculer l'échantillonnage est téléchargeable ici :

Calcul Échantillonnage

(http://avex.org.free.fr/dossiers/wp-content/2010/03/echantillonnage_champ-photo.xls)

En bleu : les champs à remplir

En rouge : les résultats de calcul

Calcul du champ photo et de l'échantillonnage

Focale (mm)	Coef. multiplicatif (x)	Focale résultante (mm)	Capteur		Taille des pixels (µm)	Champ (° ' '')			Echantillonnage ("/pixel)	Taille d'un objet (pixels)			
			Largeur (mm)	Hauteur (mm)		Largeur	Hauteur	Diagonale		°	'	''	(pixels)
2032	1	2032	22,7	15,1	7,4	0:38:24	0:25:33	0:46:07	0,75	0	22	0	1757
2032	1	2032	36	24	8,2	1:00:54	0:40:36	1:13:12	0,83	0	53	0	3820
530	1	530	22,7	15,1	7,4	2:27:14	1:37:57	2:56:50	2,88	2	0	0	2500
530	1	530	36	24	9	3:53:30	2:35:40	4:40:38	3,50	2	30	0	2570
530	1,6	848	22,7	15,1	7,4	1:32:01	1:01:13	1:50:31	1,80	1	0	0	2000
530	1,6	848	36	24	9	2:25:57	1:37:18	2:55:24	2,19	1	0	0	1644
300	1	300	22,7	15,1	7,4	4:20:07	2:53:02	5:12:25	5,09	5	0	0	3538

Focale nécessaire au bon échantillonnage

Ø _{instrument} (mm)	λ (mm)	Résolution instrument (")	Turbulence (")	Taille des pixels (µm)	Echantillonnage idéal
200	550	0,7	0,5	5,6	3338 mm < Focale < 5007 mm 17 < F/D < 25

Texte et figures : © Axel VINCENT-RANDONNIER